La convezione

La convezione è il fenomeno di trasmissione del calore che avviene nei fluidi. Coinvolge infatti movimento di massa. Si ha inoltre conduzione di calore. Il flusso termico cresce al crescere della velocità del fluido poiché essa fa sì che si trovino a contatto masse fredde e masse calde.

La convezione si dice forzata se il moto del fluido è dovuto a un agente esterno come il vento o un ventilatore. È invece naturale se il moto è dovuto alle differenze di temperatura e quindi di densità interne al fluido.
La convezione è infine mista se coesistono quella naturale e forzata. In realtà la convezione forzata ha sempre una componente naturale, ma si dice mista quando essa supera il 10%

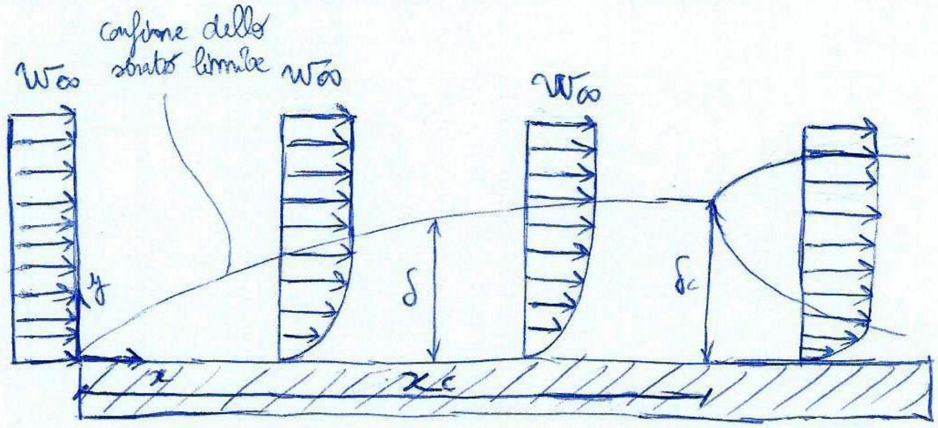
La legge di Newton per la convezione è:

$$q''_{conv} = h(T_s - T_\infty) \left[\frac{W}{m^2}\right] \qquad q_{conv} = hA(T_s - T_\infty) \; [W]$$

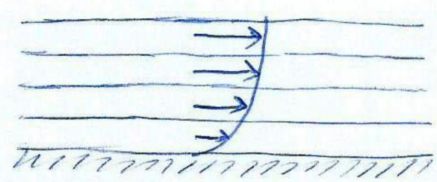
Con h coefficiente di convezione, $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$, A area di scambio termico, T_s temperatura della superficie e T_∞ quella del fluido che investe la superficie.

Convezione forzata

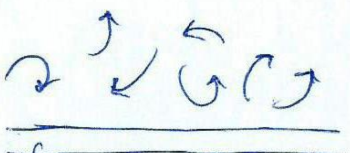
Consideriamo una lastra piana orizzontale investita da una corrente ad alta temperatura. Le molecole in prossimità della lastra saranno pressoché ferme, mentre la loro velocità aumenta man mano che ci allontaniamo dalla stessa.
Si definisce strato limite la porzione di spazio in cui si esaurisce il 99% del gradiente di velocità tra la superficie della lastra e il fluido nella zona indisturbata:



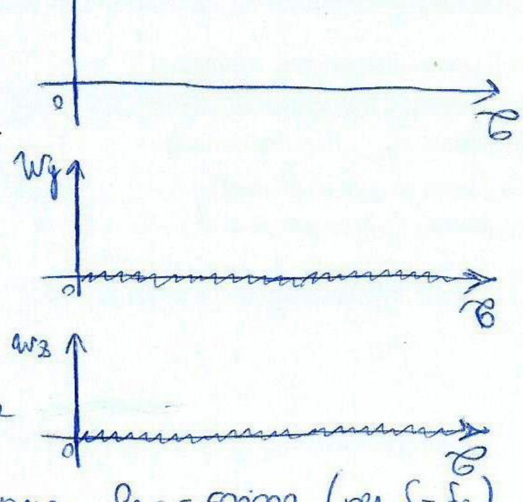
Inizialmente il moto è laminare, per tutto il tratto x_c. I filetti di fluido scorrono uno sull'altro in modo ordinato:



Da un certo punto (x_c) il moto laminare inizia a scomparire e viene sostituito da quello turbolento. Nascono componenti del moto nelle altre direzioni. Il regime laminare sopravvive solo in uno strato di base molto sottile!



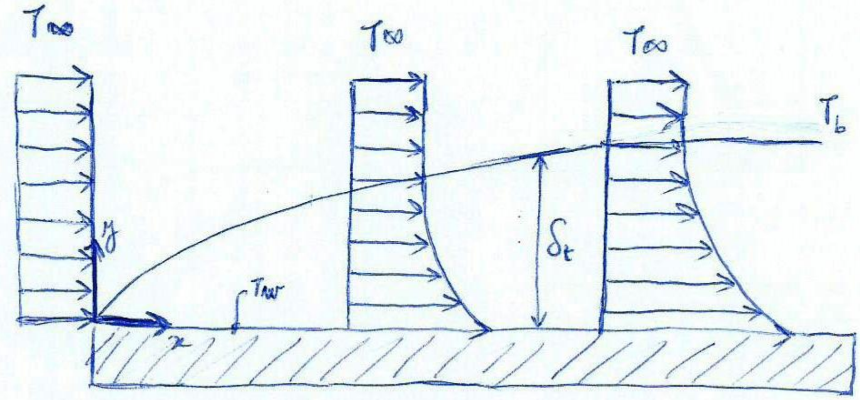
laminar sublayer: in questo strato la distribuzione di velocità è quella riportata nei diagrammi a destra



Il numero di Reynolds, $Re = \frac{w_\infty \delta}{\nu}$ assume un valore critico oltre il quale il moto diviene turbolento. Per lastre piane $Re_c = 500000$ (per $\delta = \delta_c$).

La valutazione del coefficiente di convezione h $\left[\frac{W}{m^2 K}\right]$ - Il numero di Nusselt

Ora il nostro obiettivo è quello di determinare h nell'equazione di Newton, $q_{conv} = h A (T_w - T_\infty)$. Supponendo questa volta che la lastra sia più calda della corrente, vediamo qual è l'andamento della temperatura:



Anche qui è presente lo strato limite, quello in cui il gradiente di temperatura si esaurisce per il 99% sul bordo $T_b = 0{,}99\, T_\infty$.

Introduciamo il numero di Prandtl, che rappresenta il rapporto tra l'attitudine del fluido a propagare al suo interno quantità di moto e attitudine a propagare al suo interno calore:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu \cdot c_p}{K}$$

In cui ν è la viscosità del fluido e a la diffusività termica, $a = \frac{K}{\rho c_p}$. Moltiplicando ν per ρ la viscosità, che è cinematica, diventa viscosità dinamica μ. La viscosità cinematica compare anche nel numero di Reynolds, $Re = \frac{w_\infty \delta}{\nu}$, rapporto tra forze d'inerzia e forze viscose. Attraverso il numero di Prandtl possiamo legare l'altezza dello strato limite fluidodinamico δ a quella dello strato limite termodinamico δ_t:

$$\delta_t = \frac{\delta}{\sqrt[3]{Pr}}$$

Ora uguagliamo l'equazione di Newton per la convezione a quella di Fourier, $q = -KA \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$:

$$h A (T_w - T_\infty) = -K A \left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0} \Rightarrow \frac{h}{k} = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{T_w - T_\infty}$$

Moltiplicando ambo i membri per la lunghezza significativa x (lunghezza della piastra nella direzione del moto) otteniamo il numero di Nusselt:

$$Nu = \frac{-\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}}{\frac{T_w - T_\infty}{x}} = \frac{h \cdot x}{K_{fluido}}$$

Il numero di Nusselt ci permette di valutare il coefficiente di scambio termico convettivo. A questo punto occorre valutare il numero di Nusselt, cioè determinare $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0}$, cosa non facile.
Usiamo tre equazioni:

$$\begin{cases} \text{eq.ne dell'energia} \\ \text{eq.ne del moto} \\ \text{eq.ne di continuità} \end{cases} \quad \begin{cases} a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial \tau} = w\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + u\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \\ \rho \frac{D\bar{w}}{D\tau} = \bar{F} - \text{grad}\, p + \mu \nabla^2 \bar{w} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \bar{w}) = 0 \end{cases}$$

Per semplificare consideriamo:
- regime stazionario, $\frac{\partial}{\partial \tau} = 0$;
- problema bidimensionale;
- fluido incomprimibile;
- proprietà termofisiche costanti con T.

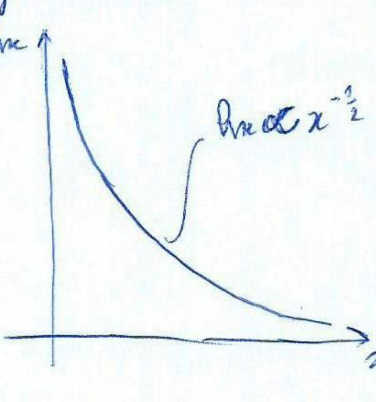
Anche con queste semplificazioni la soluzione rimane complessa. Si risolve la velocità allo strato limite per passare allo studio della temperatura. Si ottiene così, supponendo regime di moto laminare:

$$\left(\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}\right)_{y=0} = 0{,}332 \cdot \frac{T_\infty - T_w}{x} \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Perciò:

$$Nu_x = 0{,}332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \Rightarrow h_x = Nu_x \frac{K_f}{x} = 0{,}332 \frac{K_f}{x} Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$$

Graficamente:



È utile valutare il valor medio di Nu e h_x per lastra piana

$$\overline{Nu}_L = \frac{1}{L}\int_0^L Nu_x\, dx = 2\, Nu_L$$

$$\overline{h}_L = \frac{1}{L}\int_0^L h_x\, dx = 2\, h_L$$

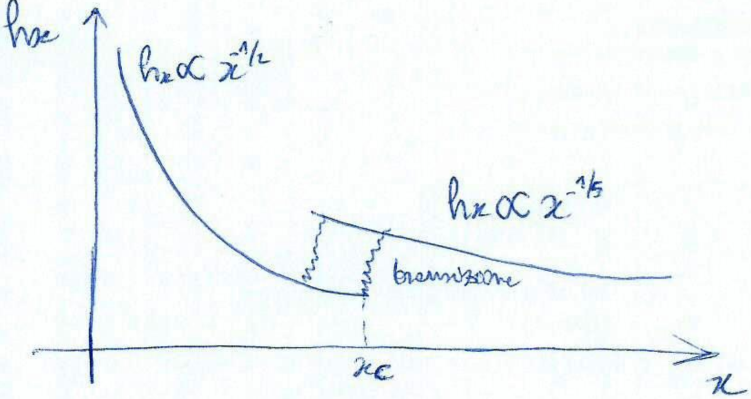
In generale, sia per moti laminari che per moti turbolenti si ha:

$$Nu = f(Re, Pr) \qquad Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

Passiamo proprio al moto turbolento. Metodi molto complessi, integrali o differenziali, conducono alla soluzione, per lastra piana:

$$Nu_x = 0,0296\ Re_x^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \qquad \overline{Nu}_L = 0,037\ Re_L^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$$

Graficamente i moti laminare e turbolento sono così rappresentabili:

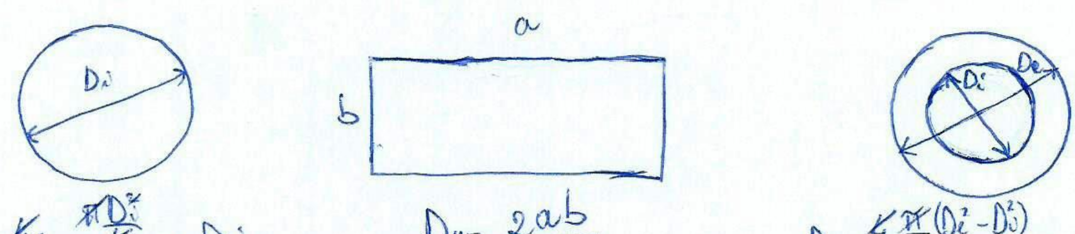


Nel laminare i coefficienti di scambio termico sono inferiori a quelli di regime turbolento.

Passiamo alla convezione forzata nei condotti. Definiamo D_H diametro idraulico, rapporto tra area A e contorno bagnato p moltiplicato per quattro:

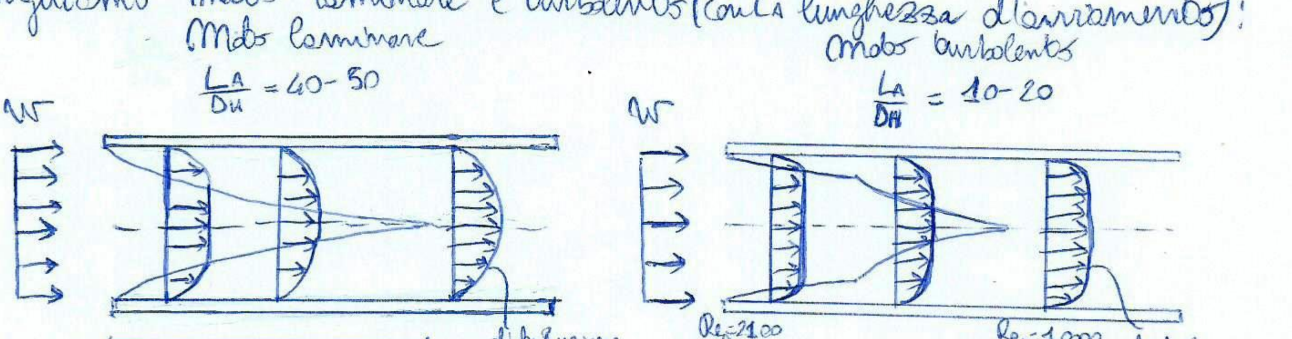
$$D_H = \frac{4A}{p} \Rightarrow Re_D = \frac{w\, D_H}{\nu}$$

Ecco D_H in alcuni casi:



$$D_H = 4 \cdot \frac{\frac{\pi D_i^2}{4}}{\pi D_i} = D_i \qquad D_H = \frac{2ab}{a+b} \qquad D_H = \frac{4\frac{\pi}{4}(D_e^2 - D_i^2)}{\pi(D_e + D_i)} = D_e - D_i$$

Distinguiamo moto laminare e turbolento (con la lunghezza d'avviamento):



Dopo la lunghezza d'avviamento si dice che il regime di moto è completamente sviluppato.

Nel caso laminare si usa anche la relazione (lungh. di ingresso termica):

$$\frac{L_t}{D_H} = 0{,}05\ Re$$

Torniamo al confronto tra i due regimi:

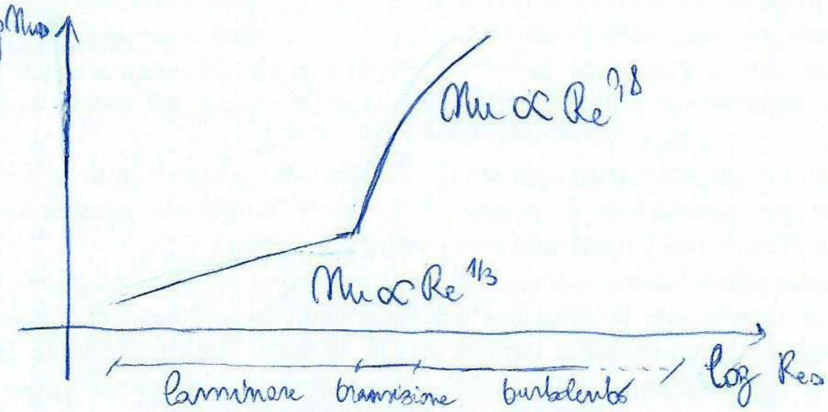
Laminare

$$Nu_D = C \cdot Re_D^{1/3} \cdot Pr^{1/3}$$

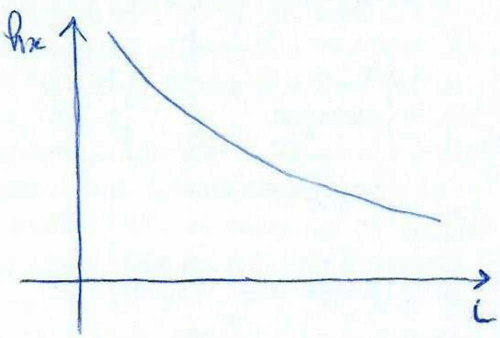
Turbolento

$$Nu_D = C \cdot Re_D^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$$

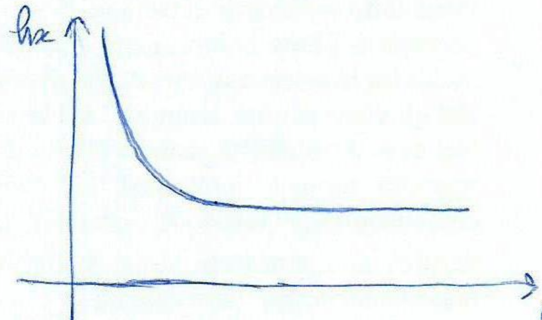
Diagrammando Nu_D e Re_D:



Anche il coefficiente h_x varia lungo il tubo, ma a un certo punto il suo valore diviene costante (asintoticamente):



Tubo corto



Tubo lungo

Il valore medio di h_x è più vicino al valore costante per il tubo lungo.

La temperatura del fluido viene determinata facendo uso della mixing cup temperature:

$$T_{mc} = \frac{\int_A \rho w T\, dA}{\int_A \rho w\, dA} \Rightarrow q = hA(T_\infty - T_{mc})$$

Formule per il calcolo di Nu nelle varie geometrie

Per la prima geometria (lastra piana isoterma) diamo solo il valore medio, quello da usare negli esercizi:

	Nu laminare	Nu turbolento	Nu combinato lam e turb
Lastra piana isoterma	$0{,}664 \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$	$0{,}037\ Re_L^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$ ($L_A \ll L_{TOT}$)	$(0{,}037\ Re_L^{4/5} - 871)\ Pr^{1/3}$ (se L_A è rilevante)
Lastra piana a flusso termico uniforme	Nu_x laminare: $0{,}453\ Re_x^{0,5}\ Pr^{1/3}$	Nu_x turbolento: $0{,}0308\ Re_x^{0,8} \cdot Pr^{1/3}$	

Cilindro esterno (flusso "su")
$$Nu_{cil} = 0{,}3 + \frac{0{,}62\ Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{\left[1 + \left(\frac{0{,}4}{Pr}\right)^{2/3}\right]^{1/4}} \cdot \left[1 + \left(\frac{Re}{28200}\right)^{5/8}\right]^{4/5}$$
Valida per $Re \cdot Pr > 0{,}2$

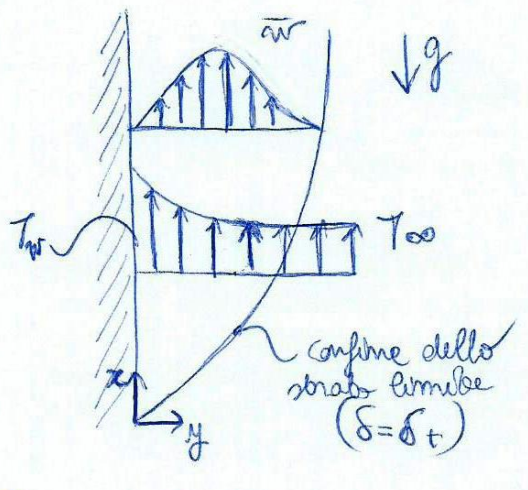
Sfera esterna (flusso "su")
$$Nu_{sf} = 2 + \left[0{,}4\ Re^{1/2} + 0{,}06\ Re^{2/3}\right] \cdot Pr^{0,4} \cdot \left(\frac{\mu_\infty}{\mu_s}\right)^{1/4}$$
Valida per $3{,}5 < Re < 80000$, $0{,}7 \leq Pr \leq 380$

Per il flusso all'interno di tubi ricordiamo alcuni importanti concetti:

- la velocità è una media tra quella nulla sulle pareti interne e quella massima lungo l'asse del tubo e si ottiene attraverso la conservazione della massa: $\dot{m} = \rho \cdot W_m \cdot A_t$ (A_t è l'area trasversale);
- anche la temperatura, se il tubo viene riscaldato o raffreddato, ha un valore medio derivante dalla conservazione dell'energia: $E_f = \dot{m}\, C_p T_m = \int_{\dot{m}} C_p T\, d\dot{m} = \int_{A_t} C_p T (\rho w\, dA_t)$. La conservazione dell'energia per flusso stazionario è: $\dot{Q} = \dot{m}\, C_p (T_u - T_i)$;
- il flusso termico per convezione in una sezione è dato da $q_s = h(T_s - T_m)$, con T_s superficiale e T_m temperatura media. Si può avere $q_s = cost$ o $T_s = cost$, ma non entrambe. Se il flusso è costante possiamo calcolare la temperatura del fluido all'uscita: $q_s \cdot A = \dot{m}\, c_p (T_u - T_i) \Rightarrow T_u = T_i + \frac{q_s \cdot A}{\dot{m}\, c_p}$.
Se invece la temperatura T_s è costante la T_m aumenta nella direzione del flusso e si ha:
$$\dot{m} \cdot c_p \cdot dT_m = h(T_s - T_m)\, dA \Rightarrow \frac{d(T_s - T_m)}{T_s - T_m} = -\frac{h\, p}{\dot{m}\, c_p} dx \Rightarrow \ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i} = -\frac{h A}{\dot{m}\, c_p}$$
Con p perimetro e avendo integrato tra le sezioni di ingresso e di uscita. Si ottiene infine $T_u = T_s - (T_s - T_i) \cdot e^{-\frac{hA}{\dot{m} c_p}}$. Ricavando $\dot{m}\, c_p = h \cdot A \cdot \left(\ln \frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}\right)^{-1}$ e sostituendo in $\dot{Q} = \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_u - T_i)$ si ottiene:
$$q = h \cdot A \cdot \frac{T_u - T_i}{\ln\left(\frac{T_s - T_u}{T_s - T_i}\right)} = h \cdot A \cdot \Delta T_{ln}$$, ΔT_{ln} diff. di temp. media logaritmica
- la caduta di pressione dovuta agli attriti è: $\Delta p = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho W_m^2}{2}$, f fattore d'attrito dal diagramma di Moody. Potenza della pompa: $\dot{L}_p = \dot{V} \cdot \Delta p = \frac{\dot{m} \cdot \Delta p}{\rho}$;
- per flusso laminare: $Nu = 1{,}86 \left(\frac{Re \cdot Pr \cdot D_H}{L}\right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\mu_m}{\mu_s}\right)^{0,14}$ per $Pr > 0{,}5$
- per flusso turbolento: $Nu = 0{,}023\ Re^{0,8} \cdot Pr^n$ ($0{,}7 \leq Pr \leq 160$, $Re > 10000$), con $n = 0{,}4$ per riscaldamento e $n = 0{,}3$ per raffreddamento.
- Lunghezze di ingresso: termica lam: $L_i = 0{,}05\ Re\ D_H$; idrodinamica lam: $L_i = 0{,}05\ Re \cdot Pr \cdot D_H$; turbolenta termica e idrodinamica: $L_i = 0{,}05\ Re \cdot Pr \cdot D_H$. D_H è diametro idraulico.

<u>Convezione naturale</u>

Come abbiamo già detto, è provocata dal gradiente di temperatura tra interno ed esterno (e quindi dal gradiente di densità). Vediamo il caso delle superficie piane:



Differenzialmente è molto difficile risolvere il problema perché le equazioni sono accoppiate

Applichiamo il teorema di Bernoulli:

$$dx + \frac{dp}{g\rho} + \frac{dw^2}{2g} + dh_a + dh_e = 0$$

Supponendo assenza di pompa o ventilatore (convezione naturale), $dh_e = 0$, e di casi dissipativi $dh_a = 0$ si ottiene:

$$dx + \frac{dp}{g\rho} + \frac{dw^2}{2g} = 0$$

Integrando tra l'origine e il generico punto x:

$$x + \frac{p_x - p_{x=0}}{g\rho} + \frac{w^2}{2g} = 0 \qquad \text{con} \qquad p_x - p_{x=0} = -\rho_\infty g x$$

$$\Rightarrow x - \frac{\rho_\infty g x}{g\rho} + \frac{w^2}{2g} = 0$$

Abbiamo usato l'ipotesi di Businesk (di indipendenza della densità da y), $\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_x = 0$. Concludendo:

$$\frac{w^2}{2g} = \left(\frac{\rho_\infty}{\rho} - 1\right)x = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \cdot x$$

Introduciamo il coefficiente di dilatazione termica e approssimiamolo:

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \simeq -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T_w} \qquad \left[\frac{1}{K}\right]$$

Sostituiamo in Bernoulli:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho} \cdot x = \beta (T_w - T_\infty) x \Rightarrow w^2 = 2g\beta(T_w - T_\infty)x$$

Integrando il secondo membro rispetto a x e dividendo per la lunghezza caratteristica della piastra si ottiene la velocità critica:

$$w_c^2 = \frac{1}{L}\int_0^L 2g\beta(T_w - T_\infty)\, x \, dx = g\beta(T_w - T_\infty) \cdot L$$

$$\Rightarrow w_c = \sqrt{g\beta(T_w - T_\infty)L}$$

Il numero di Reynolds caratteristico, cioè relativo a tale velocità, sarà allora:

$$Re_{car} = \frac{w_c L}{\nu} \Rightarrow Re_{car}^2 = \frac{w_c^2 L^2}{\nu^2} = \frac{g\beta(T_w - T_\infty) \cdot L^3}{\nu^2}$$

Tale Reynolds al quadrato esprime il rapporto tra le forze di galleggiamento che rendono possibile la convezione e quelle viscose e viene detto numero di Grashof:

$$Gr = Re_{car}^2 = \frac{g\beta(T_w - T_\infty)L^3}{\nu^2}$$

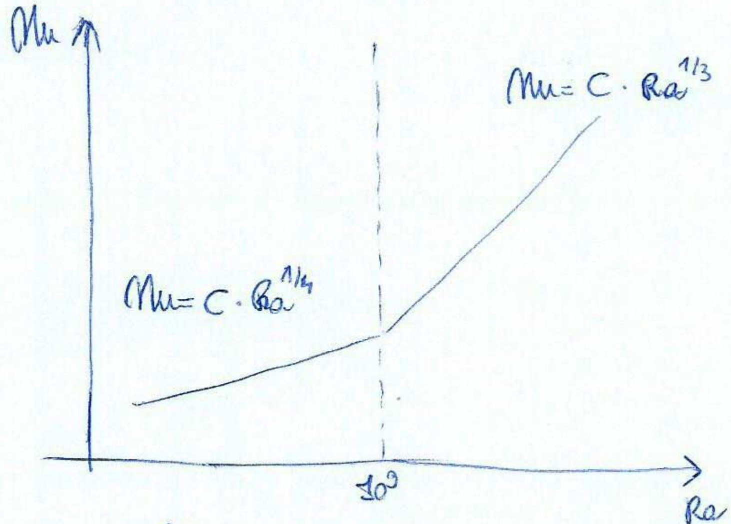
Le forze di galleggiamento sono anche dette "forze archimedee".

Più il numero di Grashof è elevato più il fenomeno convettivo è rilevante. Per la convezione forzata avremo $Nu = f(Re, Pr)$, per quella naturale $Nu = f(Gr, Pr)$, cioè $Nu = C\ Gr^m \cdot Pr^n$.
Nella convezione naturale Nu cambia anche a seconda di orientazione e geometria della superficie.
In alcuni casi $Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^m$. Allora il prodotto $Gr \cdot Pr$ viene battezzato numero di Rayleigh:

$$Nu = C\ (Gr \cdot Pr)^m = C\ Ra^m$$

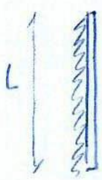
$Ra = 10^9$ rappresenta la transizione tra laminare e turbolento.

Graficamente:



Vediamo come ottenere Nu:

piastra verticale



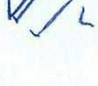
$Nu = 0{,}59 \cdot Ra^{1/4}$
se $10^4 < Ra < 10^9$
$Nu = 0{,}1\ Ra^{1/3}$
se $10^9 < Ra < 10^{13}$

$\delta = L$

Più accurata:

$$Nu = \left\{0{,}825 + \frac{0{,}387 \cdot Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0{,}492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

Valida anche per piastra inclinata, basta usare $g\cos\theta$ al posto di g se $Ra < 10^9$:



piastra orizzontale

$\delta = A/P$

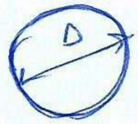
sup superiore calda o inferiore fredda

$Nu = 0{,}54\ Ra^{1/4}$
se $10^4 < Ra < 10^7$
$Nu = 0{,}15\ Ra^{1/3}$
se $10^7 < Ra < 10^{11}$

sup superiore fredda o inferiore calda

$Nu = 0{,}27\ Ra^{1/4}$
se $10^5 < Ra < 10^{11}$

sfera



$\delta = \frac{1}{2}\pi D$

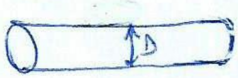
$$Nu = 2 + \frac{0{,}589\ Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0{,}492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}}$$

se $Ra \leq 10^{11}$, $Pr \geq 0{,}7$

Cilindro

orizzontale

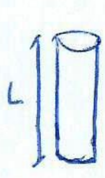
$\delta = D$



$$Nu = \left\{0{,}6 + \frac{0{,}387\ Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0{,}559}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}}\right\}^2$$

se $10^5 < Ra < 10^{12}$

verticale



$\delta = L$
stesse formule della piastra verticale
se $D \geq \frac{35 L}{Gr^{1/4}}$